I Champ magnétique produit par une puis deux spires

A]

1) Symétrie de la distribution

(Oxy) plan de sym $\Rightarrow \vec{B} \perp$ plan de sym

(Oxz) et (Oyz) plan d'antisym $\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{e}_z$

+ Invariance par rotation $\varphi \Rightarrow \vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_z$

2) Relation $B(z)/B(-z)$

$B(z) = B(-z)$ car z et $-z$ sont symétriques / O

pas de discontinuité de champ

$B(0)$ non nul au centre de la spire

3) Centre $z=0$ donc $B_0 = B(0) = \mu_0 \dfrac{I}{2R}$

4) Hors de l'axe $\Rightarrow$ composante radiale non nulle $\Rightarrow$ système cylindrique

$$\vec{B}(M') = B_\rho(\rho,z)\vec{e}_\rho + B_z(\rho,z)\vec{e}_z$$

B] $-\frac{R}{2} \leq z \leq +\frac{R}{2}$

1) 2 bobines $\Rightarrow$ principe de superposition $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$

$= \left(B(O_1M) + B(O_2M)\right)\vec{e}_z = B(M)\vec{e}_z$

ici $\overline{O_1M} = \overline{O_1O} + \overline{OM} = R/2 + z$

$\overline{O_2M} = \overline{O_2O} + \overline{OM} = -R/2 + z$

soit
$$B(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)\left\{\left(\frac{R^2}{R^2+(z+R/2)^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{R^2}{R^2+(z-R/2)^2}\right)^{3/2}\right.$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)\left\{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{1+\left(\frac{z}{R}-\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{3/2}\right\}$$

$$= B_0\left\{\frac{1}{\left(1+(u+1/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1+(u-1/2)^2\right)^{3/2}}\right\}$$

4) $u=0$ ($z=0$)

$$B(\Pi) = B_0\left\{\frac{1}{(1+1/4)^{3/2}} + \frac{1}{(1+1/4)^{3/2}}\right\} = 2B_0\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \simeq 1{,}43\,B_0$$

$u = \pm 1/2$

$$B(\Pi) = B_0\left\{\frac{1}{(1+1)^{3/2}} + 1\right\} = B_0\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\right\} \simeq 1{,}35\,B_0$$

$\Rightarrow$ chp quasi constant entre $-R/2$ et $+R/2$

II Freinage électromagnétique

II 1) $\vec{B} = B_\rho \vec{e_\rho} + B_z \vec{e_z}$

1a) $d\vec{F} = I_2\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

1b) $d\vec{\ell} = R_2\, d\varphi\, \vec{e_\varphi}$

soit $d\vec{F} = I_2 R_2\, d\varphi\, \vec{e_\varphi} \wedge (B_\rho \vec{e_\rho} + B_z \vec{e_z})$

$= I_2 R_2\, d\varphi\,(-B_\rho \vec{e_z} + B_z \vec{e_\rho})$

$= I_2 R_2 B_z\, d\varphi\, \vec{e_\rho} - I_2 R_2 B_\rho\, d\varphi\, \vec{e_z}$

1c) $\vec{e_\rho} = \cos\varphi\, \vec{e_x} + \sin\varphi\, \vec{e_y}$

donc $d\vec{F} = I_2 R_2 B_z \cos\varphi\, d\varphi\, \vec{e_x} + I_2 R_2 B_z \sin\varphi\, d\varphi\, \vec{e_y} - I_2 R_2 B_\rho\, d\varphi\, \vec{e_z}$

1d) $\vec{F} = \cancel{I_2 R_2 B_z \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi\, \vec{e_x}} + \cancel{I_2 R_2 B_z \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi\, \vec{e_y}}$ cq fd. $- I_2 R_2 B_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \vec{e_z}$

$\vec{F} = -2\pi I_2 R_2 B_\rho\, \vec{e_z}$

II 2) $\vec{B} = B_{int}\, \vec{e_z}$ avec $B_\rho = 0$ $\quad \vec{F} = \vec{0}$

II 3) spire près d'une extrémité $\quad B_\rho = K\rho = K R_2$

$\vec{F} = -2\pi I_2 K R_2^2\, \vec{e_z}$

II 4) force de Laplace non nulle seulement aux extrémités du solénoïd

$\ominus$ freinage !